ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Session Mai 1988

CONCOURS EXTERNE IEEAC CF et CT

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Coef. : 1

N.B. - *La plupart des définitions relatives à la convergence des séries de fonctions numériques et des critères de convergence uniforme sont rappelées dans l'énoncé . Le barème tiendra compte du soin du candidat à préciser les propriétés et théorèmes invoqués, et, notamment, ce qui permet de les appliquer dans le cas traité.*

On étudie les séries de fonctions (U) et (V) dont le terme général est, respectivement, la fonction :

$$u_n : (x, t) \longrightarrow u_n(x, t) = x^n \cos nt$$

et $$v_n : (x, t) \longrightarrow v_n(x, t) = x^n \sin nt,$$

x et t étant des réels et n étant entier et strictement positif, et on en déduit certains développements en série de fonctions ainsi que leurs propriétés. Les trois parties du problème peuvent être traitées dans un ordre quelconque et, si nécessaire, on pourra, pour traiter une question, admettre les résultats que l'on demandait d'établir dans les questions qui la précèdent.

PARTIE I

Dans cette partie, t est un paramètre fixé dans R et x est une variable. Les séries (U) et (V) sont, alors, notées (U_t) et (V_t) et sont des séries de fonctions d'une variable dont le terme général est, respectivement, la fonction d'une variable réelle x :

$$u_{n,t} : x \longrightarrow u_{n,t}(x) = x^n \cos nt \ ,$$

et $$v_{n,t} : x \longrightarrow v_{n,t}(x) = x^n \sin nt \ ,$$

et, lorsque ces séries convergent, la somme de chacune d'elles est une fonction, d'une variable, notée respectivement :

$$U_t : x \longrightarrow U_t(x) \qquad \text{et} \qquad V_t : x \longrightarrow V_t(x).$$

Les séries (U_t) et (V_t) sont donc des séries entières dont le coefficient du terme général est respectivement cos nt et sin nt.

I.1. - Déterminer le rayon de convergence des séries entières (U_t) et (V_t) et la somme de chacune d'elles à l'intérieur de l'intervalle de convergence; on pourra considérer la série numérique de terme général complexe :

$$z_n = x^n \cos nt + i\, x^n \sin nt.$$

I.2. - h étant un réel fixé dans $]0,1[$ et ε étant un réel strictement positif quelconque, calculer un nombre N , ne dépendant que de n et ε et tel que, pour tous entiers $n > N$ et $p \geqslant 0$ et pour tout x de $[-h, +h]$, on ait : $\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_{k,t}(x) \right| \leqslant \varepsilon$,

critère permettant d'affirmer que la série (U_t) est uniformément convergente, sur $[-h, +h]$ par rapport à x.

I.3. - Soit $0 < h < 1$ fixé. Montrer qu'il existe des séries numériques convergentes de terme général w_n positif indépendant de x et tel que, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout x dans $[-h, +h]$, on ait : $|u_{n,t}(x)| \leqslant w_n$; s'il en est ainsi, on dit, par définition, que la série (U_t) est normalement convergente sur $[-h, +h]$ par rapport à x.

Montrer que la série (V_t) est aussi normalement convergente sur $[-h, +h]$ par rapport à x.

Montrer que les ensembles de nombres $\{|u_{n,t}(x)|\}$ et $\{|v_{n,t}(x)|\}$ admettent chacun une borne supérieure lorsque x parcourt $[-h, +h]$, on note respectivement $\|u_{n,t}\|$ et $\|v_{n,t}\|$ ces bornes supérieures.

Montrer que les séries numériques de terme général $\|u_{n,t}\|$ et $\|v_{n,t}\|$ sont convergentes ; on rappelle que, s'il en est ainsi, chaque série (U_t) et (V_t) est, par définition, convergente en norme sur $[-h, +h]$ par rapport à x pour la norme de la convergence uniforme.

Montrer, dans le cas présent, l'équivalence entre convergence normale et convergence en norme pour la norme de la convergence uniforme.

I.4. - Les séries (U_t) et (V_t) sont-elles uniformément convergentes sur $[-1, +1]$ par rapport à x ? Sont-elles convergentes en norme pour la norme de la convergence uniforme sur cet intervalle ?

I.5. - Sans utiliser les expressions trouvées en I.1 pour $U_t(x)$ et $V_t(x)$, déduire de l'étude des séries entières (U_t) et (V_t) les limites de

$\dfrac{U_t(x)}{x}$ et de $\dfrac{V_t(x)}{x}$ lorsque x tend vers zéro dans $]-1, +1[$.

Retrouver ces limites à l'aide des expressions de $U_t(x)$ et de $V_t(x)$ calculées en I.1.

Tournez la page S.V.P.

I.6. - A l'aide d'une intégration terme à terme, sur un intervalle convenable, des séries de fonctions dont le terme général a respectivement pour valeur $x^{n-1}\cos nt$ et $x^{n-1}\sin nt$,

déterminer le développement en série entière des fonctions :

$$F_t : x \longrightarrow F_t(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 - 2x\cos t + x^2)$$

$$H_t : x \longrightarrow H_t(x) = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin t}{1 - x\cos t}$$

et préciser leur rayon de convergence.

PARTIE II

Dans cette partie, x est un paramètre fixé dans $]-1, +1[$ et t est une variable dans $\mathbb{R}$. Les séries (U) et (V) sont, alors, notées (U_x) et (V_x) et sont des séries de fonctions dont le terme général est, respectivement, la fonction d'une variable réelle t :

$$u_{n,x} : t \longrightarrow u_{n,x}(t) = x^n \cos nt,$$

et $$v_{n,x} : t \longrightarrow v_{n,x}(t) = x^n \sin nt ;$$

lorsque ces séries convergent, la somme de chacune d'elles est une fonction, d'une variable, notée respectivement :

$$U_x : t \longrightarrow U_x(t) \text{ et } V_x : t \longrightarrow V_x(t).$$

II.1. Montrer que les séries numériques de terme général respectif $u_{n,x}(t)$ et $v_{n,x}(t)$ sont absolument convergentes pour tout t de $\mathbb{R}$; en déduire la convergence simple des séries (U_x) et (V_x) sur $\mathbb{R}$.

Montrer que les ensembles de nombres $\{|u_{n,x}(t)|\}$ et $\{|v_{n,x}(t)|\}$ admettent chacun une borne supérieure lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, on note respectivement $\|u_{n,x}\|$ et $\|v_{n,x}\|$ ces bornes supérieures. Montrer que les séries de terme général respectif $\|u_{n,x}\|$ et $\|v_{n,x}\|$ sont convergentes. En déduire que les séries (U_x) et (V_x) sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$ par rapport à t ; montrer qu'elles sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ par rapport à t. (Critère et définition rappelés en I.2 et I.3)

II.2. On donne la somme V_x de (V_x) : $V_x : t \longrightarrow V_x(t) = \dfrac{x\sin t}{1 - 2x\cos t + x^2}$,

en déduire par une intégration judicieusement choisie la somme :

$$R_x : t \longrightarrow R_x(t)$$

de la série de fonctions (R_x) dont le terme général est :

$$r_{n,x} : t \longrightarrow r_{n,x}(t) = \frac{x^n}{n}\cos nt.$$

II.3. Etablir la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ par rapport à t de la série de fonctions (S_x) dont le terme général est la fonction :

$$s_{n,x} : t \longrightarrow s_{n,x}(t) = \frac{x^n}{n}\sin nt.$$

En déduire que la somme $S_x : t \longrightarrow S_x(t)$ de la série (S_x) est une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$; était-il nécessaire de s'assurer de la convergence uniforme de (S_x) ? On donne la somme S_x de (S_x) :

$$S_x : t \longrightarrow S_x(t) = \operatorname{Arctang}\frac{x\sin t}{1 - x\cos t}$$

en déduire une expression de la somme U_x de la série de fonctions (U_x).

II.4. Etablir la relation : $$1 + 2U_x(t) = \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2}$$

et vérifier que l'on peut intégrer sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ la fonction :

$$g_a : t \longrightarrow g_a(t) = \frac{1}{1 - 2a\cos t + a^2}$$

où a est un réel de valeur absolue différente de 1 ; en déduire, en fonction de x, la valeur de l'intégrale

$$J_p(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos pt}{1 - 2x\cos t + x^2}\,dt, \quad p \text{ étant un entier naturel,}$$

puis, pour $|a| > 1$, déduire de $J_p\left(\frac{1}{a}\right)$ la valeur de $J_p(a)$.

II.5. Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π périodique

$$g_a : t \longrightarrow g_a(t)$$ selon que $|a| < 1$ ou que $|a| > 1$.

En déduire, en distinguant le cas $|a| < 1$ du cas $|a| > 1$, un développement en série de fonctions, de la variable réelle a, de la fonction :

$$J : a \longrightarrow J(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - 2a\cos t + a^2)^2}.$$

TSVP

PARTIE III

Dans cette partie, (x, t) est un couple de variables de $\left[-1, +1\right] \times \mathbb{R}$ et, lorsque les séries de fonctions de deux variables (U) et (V) convergent, chacune d'elles a pour somme une fonction, de deux variables, notée respectivement :

$$U : (x,t) \longrightarrow U(x,t) \quad \text{et} \quad V : (x,t) \longrightarrow V(x,t).$$

III.1. Soit h un réel dans $]0,1[$. Montrer qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre M ne dépendant que du couple de réels (h,ε) et tel que, pour tout $n > M$ et $p \geqslant 0$ et pour tout couple de variables (x,t) de $\left[-h, +h\right] \times \mathbb{R}$, on ait : $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x,t)\right| \leqslant \varepsilon$,

critère permettant d'affirmer que la série (U) est uniformément convergente sur $\left[-h, +h\right] \times \mathbb{R}$ par rapport à l'ensemble des variables x et t ; on montrerait que la série (V) possède la même propriété.

Les séries (U) et (V) sont-elles uniformément convergentes sur $\left[-1, +1\right] \times \mathbb{R}$ par rapport à l'ensemble des variables x et t ?

III.2. Soit encore h un réel fixé de $]0, 1[$. Montrer que les quatre séries de fonctions, de deux variables, de terme général respectif :

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} : (x,t) \longrightarrow n\,x^{n-1}\cos nt\,, \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} : (x,t) \longrightarrow n\,x^{n-1}\sin nt,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} : (x,t) \longrightarrow -n\,x^{n}\sin nt \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} : (x,t) \longrightarrow n\,x^{n}\cos nt,$$

sont uniformément convergentes sur $\left[-h, +h\right] \times \mathbb{R}$ par rapport à l'ensemble des variables x et t.

En déduire que sur $\left[-h, +h\right] \times \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}\cos nt \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}\sin nt$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} -n\,x^{n}\sin nt \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n}\cos nt.$$

III.3. Déduire de la question précédente que pour tout (x,t) de $]-1, +1[\times \mathbb{R}$, on a:

$$x\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad x\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\,.$$

Retrouver ces deux égalités à partir de l'expression de U(x,t) et de celle de V(x,t) sous la forme de combinaisons finies de fonctions élémentaires usuelles.

Autre petit jeu pour les chercheurs méthodiques :

par des hasards inexplicables :

combien de fois une même fonction (non usuelle) apparait-elle dans plusieurs énoncés de ce recueil ?

combien d'énoncés ressemblent à des énoncés des recueils des années précédentes ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail